数理解析研究所講究録
935 巻 1996 年 1-8

調和関数と複素光錐上の解析汎関数

上智大学理工　森本光生　(Mitsuo Morimoto)
上智大学理工　藤田景子　(Keiko Fujita)

第 1 講演者は, 1979 年以来, 球面上の超関数や解析汎関数に興味を持ち研究を始めた. これは 1 変数の周期超関数の拡張である. 1 変数の周期超関数のフーリエ級数展開は, 球面上の超関数の球面超関数展開に対応する. このように, 球面は, 回転群の作用する等質空間であり, その上での解析は, ルジャンドル多項式などの特殊函数を用いて具体的に実行することができる.

この研究の途中で, 複素球面や複素光錐という複素多様体が重要な役割を果たすことに気が付いた. 今回の報告ではまず, §1 で 1988 年までの結果を復習する. この際, 我々のグループの得た結果は, Lebeau の仕事とも関連していることに注意する. §2 では, 複素光錐の上に, 1 変数正則函数のコーシー積分公式が拡張できることをを証明し, この応用として, 複素光錐上の解析汎関数のコーシー変換についての結果を述べる.

1　既知の結果

複素光錐 (complex light cone) $\tilde{M}$ の定義は次の通りである:

$$\tilde{M} = \{z \in \mathbf{C}^{d+1}; z^2 = 0\}$$

ただし,

$$z^2 = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{d+1}^2, \quad z = (z_1, z_2, \cdots, z_{d+1})$$

である. $z = x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}^{d+1}$ とすると, $z^2 = 0$ は,

$$x^2 = y^2, \quad x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{d+1} y_{d+1} = 0$$

となるので, $\tilde{M} \setminus \{0\}$ は, 球面 S^d の余法束 (conormal bundle) からゼロ切断を除いたものと同型である.

$$L(z) = L(x+iy) = \left[x^2 + y^2 + 2\sqrt{x^2y^2 - (x\cdot y)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

をリーノルムという.

$$\tilde{B}(r) = \{z \in \mathbf{C}^{d+1}; L(z) < r\}, \quad \tilde{B}[r] = \{z \in \mathbf{C}^{d+1}; L(z) \leq r\}$$

を開リー球 (閉リー球) という.

$$L^*(z) = \sup\{|z\cdot\zeta|; L(\zeta) \leq 1\}$$

を双対リーノルムという. また次をユークリッドノルムという:

$$\|z\|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_{d+1}|^2.$$

$z \in \tilde{M}$ ならば, $L(x+iy) = 2\|x\|$, $L^*(x+iy) = \|x\|$, $\|x+iy\| = \sqrt{2}\|x\|$ であるので,

$$M = \{z \in \tilde{M}; L(z) = 1\} = \{z \in \tilde{M}; L^*(z) = \frac{1}{2}\} = \{z \in \tilde{M}; \|z\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\}$$

は, 球面 S^d の余法球束 (conormal sphere bundle) と同型である (井伊 [1], 和田 [9]). さらに,

$$\tilde{M}(r) = \{z \in \tilde{M}; L(z) < r\}, \quad \tilde{M}[r] = \{z \in \tilde{M}; L(z) \leq r\}$$

と置く.

1.1 制限写像

制限写像 $f \mapsto f|_{\tilde{M}(r)}$ は, 次の線型位相同型を与える.

$$\mathcal{O}_\Delta(\tilde{B}(r)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\tilde{M}(r)) \tag{1}$$

$$\mathrm{Exp}_\Delta(\mathbf{C}^{d+1}; (r : L^*)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Exp}(\tilde{M}; (r : L^*)) \tag{2}$$

ここで, $\mathcal{O}_\Delta(\tilde{B}(r))$ は $\tilde{B}(r)$ 上の複素調和関数の空間で, $\mathcal{O}(\tilde{M}(r))$ は $\tilde{M}(r)$ 上の正則関数の空間を表す. また,

$$\mathrm{Exp}_\Delta(\mathbf{C}^{d+1}; (r : L^*))$$

は $\mathbf{C}^{d+1}$ 上の指数型 $(r:L^*)$ の複素調和整関数の空間で,

$$\mathrm{Exp}(\tilde{M};(r:L^*))$$

は $\tilde{M}$ 上の指数型 $(r:L^*)$ の整関数の空間である. (森本 [5], 和田 [9], 和田・森本 [10])

1.2 フーリエ変換

フーリエ変換 $\mathcal{F}T(\zeta)=\langle T_z,\exp(iz\cdot\zeta)\rangle$ は次の線型位相同型を与える.

$$\mathcal{F}\ :\ \mathcal{O}'(\tilde{M}[r])\xrightarrow{\sim}\mathrm{Exp}_\Delta(\mathbf{C}^{d+1};(r:L^*))\xrightarrow{\sim}\mathrm{Exp}(\tilde{M};(r:L^*))\qquad(3)$$

$$\mathcal{F}\ :\ \mathrm{Exp}'(\tilde{M};[r:L^*])\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_\Delta(\tilde{B}(r))\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}(\tilde{M}(r))\qquad(4)$$

ここで,

$$\mathcal{O}'(\tilde{M}[r])$$

は $\mathcal{O}(\tilde{M}[r])$ の双対空間で,

$$\mathrm{Exp}'(\tilde{M};[r:L^*])$$

は $\mathrm{Exp}(\tilde{M};[r:L^*])$ の双対空間である. (木幡・岡本 [3], 森本・和田 [6], 森本 [7])

1988 年の数理解析研究所の研究集会で, §1.1 と §1.2 は報告した.

1.3 Lebeau の仕事

$$B(1)=\{x\in\mathbf{R}^{d+1};x^2<1\}$$

を半径 1 の開球とする. g を S^d 上の超関数 (hyperfunction) とするとき, 調和関数

$$\tilde{g}\in\mathcal{A}_\Delta(B(1))$$

でディリクレ境界条件

$$\tilde{g}|_{S^d}=g$$

を満たすものがただ一つ存在する. $\tilde{g}$ は, 解析接続により

$$F\in\mathcal{O}_\Delta(\tilde{B}(1)),\quad F|_{B(1)}=\tilde{g}$$

と延長できる. この F を $\tilde{M}(1)$ に制限することにより

$$f = F|_{\tilde{M}(1)} \in \mathcal{O}(\tilde{M}(1))$$

を定義する. 以上の対応により, 球面上の超関数 g と複素光錐の開集合 $\tilde{M}(1)$ の上の正則関数 f が 1 対 1 に対応している.

いま, $\xi \in \mathbf{R}^{d+1}$ を単位ベクトルとすれば, $\frac{x-i\xi}{2}$ は $\tilde{M}(1)$ の境界 M 上の点である. Lebeau [4] は次の事実を証明した.

(x,ξ) で 超関数 g がマイクロ解析的であるための必要十分条件は, f が $\frac{x-i\xi}{2}$ の近傍に解析接続されることである.

この事実に鑑み, 小松 [2] によるマイクロ関数の層の次の定義は正当である:

$$\mathcal{C}_M = \left(\mathcal{O}_{\tilde{M}(1)}/\mathcal{O}_{\tilde{M}[1]}\right)^a.$$

$\mathcal{C}_M$ は, S^d の余法球束 M の上の層である。

2 複素光錐上のコーシーの積分公式とその応用

さて,

$$K_0(t) = \frac{1+t}{(1-t)^d} = \sum_{k=0}^{\infty} N(k,d)t^k$$

とする. $f \in \mathcal{O}(\tilde{M}(r))$ に対して, コーシーの積分公式が成り立つ.

$$f(w) = \int_M f(\rho z) K_0\left(\frac{2}{\rho}\bar{z}\cdot w\right) d\mu(z), \quad \rho < r,\ w \in \tilde{M}(\rho). \tag{5}$$

コーシーの積分公式は, $f \in \mathcal{O}(\tilde{M}(r))$ の調和拡張を与える. すなわち,

$$F(w) = \int_M f(\rho z) K_0\left(\frac{2}{\rho}\bar{z}\cdot w\right) d\mu(z), \quad L(w) < \rho < r \tag{6}$$

と置くと, F は ρ に依存せず, $F \in \mathcal{O}_\Delta(\tilde{B}(r))$ を定め, $F|_{\tilde{M}(r)} = f$ を満たす. 換言すれば, (6) は同型 (1) の逆写像を与える.

次に, $T \in \mathcal{O}'(\tilde{M}[r])$ とする. $L(z) < \frac{1}{r}$ ならば, $w \mapsto K_0(2z\cdot w)$ は $\mathcal{O}(\tilde{M}[r])$ の元を定めるので,

$$\check{T}(z) = \langle T_w, K_0(2z\cdot w)\rangle$$

が定義できる. $\check{T}(z) \in \mathcal{O}_\Delta(\tilde{B}(\frac{1}{r}))$ であり, $\check{T}$ を T のコーシー変換という.

$$\mathcal{O}'(\tilde{M}[r]) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_\Delta(\tilde{B}\left(\frac{1}{r}\right)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\tilde{M}\left(\frac{1}{r}\right))$$

は同型写像で, 反転公式

$$\langle T, f\rangle = \int_M f(\rho z)\check{T}\left(\frac{\bar{z}}{\rho}\right) d\mu(z)$$

が成り立つ. ただし, $\rho > r$ は r に十分近いものとする.

2.1 コーシーの積分公式の証明

M上の正規化した不変測度を $d\mu$で表す. $\mathcal{P}^k(\mathbf{C}^{d+1})$ で k次同次多項式の全体を表す. また,

$$\mathcal{P}^k(\tilde{M}) = \left\{f|_{\tilde{M}}; f \in \mathcal{P}^k(\mathbf{C}^{k+1})\right\}$$

と置く. 次の補題が成り立つ.

補題 $f_k \in \mathcal{P}^k(\tilde{M})$, $f_\ell \in \mathcal{P}^\ell(\tilde{M})$ に対しては, $k \neq \ell$のとき直交関係が成り立つ:

$$\int_M f_k(z) f_\ell(\bar{z}) d\mu(z) = 0.$$

また, 次の再帰公式が成り立つ:

$$f_k(w) = 2^k N(k,d) \int_M f_k(z)(\bar{z}\cdot w)^k d\mu(z), \quad w \in \tilde{M}.$$

$f \in \mathcal{O}(\tilde{M}(r))$ とし, その k次成分を次式で定義する:

$$f_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=1-\epsilon} \frac{f(tz)}{t^{k+1}} dt, \quad z \in \tilde{M}(r).$$

この右辺は, $0 < \epsilon < 1$ に無関係であり,

$$f_k \in \mathcal{P}^k(\tilde{M})$$

を定める. もし $z \in \tilde{M}(r')$, $r' < r$, ならば, 積分路を $|t| = 1 + \epsilon$とできる.

いま,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{t^{k+1}} = \frac{1}{t-1}$$

であるので, f は f_k により $\tilde{M}(r)$ のコンパクト集合上一様に展開できる. すなわち,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z), \quad z \in \tilde{M}(r).$$

さて, $0 < \rho < r$とすれば, M上一様に,

$$f(\rho z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(\rho z) = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j f_j(z), \quad z \in M$$

であるから, 補題により,

$$\begin{aligned} \int_M f(\rho z)(\bar{z} \cdot w)^k d\mu(z) &= \int_M \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j f_j(z)(\bar{z} \cdot w)^k d\mu(z) \\ &= \frac{\rho^k}{2^k N(k,d)} f_k(w), \quad w \in \tilde{M} \end{aligned}$$

故に,

$$\begin{aligned} f(w) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k(w) \\ &= \int_M f(\rho z) \sum_{k=0}^{\infty} N(k,d) \left(\frac{2}{\rho}\right)^k (\bar{z} \cdot w)^k d\mu(z) \\ &= \int_M f(\rho z) K_0 \left(\frac{2}{\rho} \bar{z} \cdot w\right) d\mu(w) \end{aligned}$$

ここで収束するための条件は,

$$\left|\frac{2}{\rho} \bar{z} \cdot w\right| \le \frac{2}{\rho} L^*(z) L(w) = \frac{L(w)}{\rho} < 1$$

である. これでコーシーの積分公式 (5) が証明できた.

2.2 1変数の場合との関連

$\tilde{M}$は複素錐であるので, 1変数の場合と同様に計算ができた. すなわち, $\mathbf{C}$ 上では, 上述の補題に対応する直交関係, 再帰公式は次の自明なものとなる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} z^k \bar{z}^\ell \frac{dz}{z} &= 0, \quad k \neq \ell \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} z^k (\bar{z} w)^k \frac{dz}{z} &= w^k \end{aligned}$$

また，複素光錐上に拡張した１変数正則函数のコーシーの積分公式は次のものである．

$$f(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}f(\rho z)\frac{1}{1-\frac{\bar{z}w}{\rho}}\frac{dz}{z}$$

１変数の解析汎関数の理論は，複素光錐の上に拡張できる．詳しくは，森本・藤田 [8] を参照されたい．

参考文献

[1] K.Ii: On a Bargmann-type transform and a Hilbert space of holomorphic functions, Tôhoku Math. J., 38 (1986), 57 – 69.

[2] H.Komatsu: Microlocal analysis in Gevrey classes and in complex domains, Microlocal Analysis and Applications, Springer Lecture Notes in Math., 1495(1991), 161 – 236.

[3] A.Kowata and K.Okamoto: Harmonic functions and the Borel-Weil theorem, Hiroshima Math. J., 4(1974), 89 – 97.

[4] G.Lebeau: Fonctions harmoniques et spectre singulier, Ann. scient. Ec. Norm. sup. 4e série, 13(1980), 269 – 291.

[5] M.Morimoto: Analytic functionals on the sphere and their Fourier-Borel transformations, Complex Analysis, Banach Center Publications 11, PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1983, 223 – 250.

[6] M.Morimoto and R.Wada: Analytic functionals on the complex light cone and their Fourier-Borel transformations, Algebraic Analysis, Vol. 1, Academic Press, 1988, 439 – 455.

[7] M.Morimoto: Analytic functionals on the sphere, SEA Bull. Math. Special Issue (1993), 93 – 99.

[8] M.Morimoto and K.Fujita: Analytic functionals and entire functionals on the complex light cone, in preparation.

[9] R.Wada: On the Fourier-Borel transformations of analytic functionals on the complex sphere, Tôhoku Math. J., 38(1986), 417 – 432.

[10] R.Wada and M.Morimoto: A uniqueness set for the differential operator $\Delta_z + \lambda^2$, Tokyo J. Math., 10(1987), 93 – 105.